Welton Dias de Lima

LÓGICA MATEMÁTICA

Implicação e Equivalência Lógica

Gama, DF, 03 de Maio de 2021.

CENTRO UNIVERSITÁRIO APPARECIDO DOS SANTOS - UNICEPLAC

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

L732l

Lima, Welton Dias de.

Lógica matemática: implicação e equivalência lógica. Gama, DF: UNICEPLAC, 2021.

19 p.

1. Lógica matemática. 2. Equivalência lógica. 3. Matemática. I. Título.

CDU: 51

Relações de equivalência e implicação lógica

Cristiane da Silva

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

> Definir as relações de equivalência e implicação lógica.
> Distinguir relações de equivalência e implicação lógica.
> Usar os conceitos de equivalência e implicação lógica na resolução de problemas.

LÓGICA MATEMÁTICA

TÓPICOS DA AULA:

1 – Implicação Lógica.

2 – Equivalência Lógica.

3 – Lei de Morgam.

Introdução

Uma das aplicações da lógica matemática é na formalização e na justificativa dos elementos do raciocínio empregados em demonstrações e provas de teoremas. No estudo da lógica, as proposições (sentenças/afirmações) assumem valores--verdade que podem ser verdadeiros ou falsos. Além disso, algumas relações que se estabelecem entre as proposições são muito importantes, como as relações de equivalência e implicação lógica. Na matemática, a equivalência indica que as características das grandezas têm o mesmo valor, como a força ou o peso. Para a lógica, equivalência significa igualdade entre duas proposições, ou seja, que elas têm o mesmo valor-verdade.

LÓGICA MATEMÁTICA

a) Implicação Lógica

Implicação Lógica

Definição

Diz-se que uma proposição P implica logicamente uma proposição Q, se Q é verdadeira todas as vezes que P é verdadeira:

- **Dizemos que P implica Q e escrevemos P => Q**

Na lógica e na matemática, a **implicação**, ou **condicional** é a indicação do tipo "SE...ENTÃO", indicando que uma condição deve ser satisfeita necessariamente para que a outra seja verdadeira.

LÓGICA MATEMÁTICA

a) Implicação Lógica

3. EXEMPLIFICAÇÃO

(1) As tabelas-verdade das proposições:

$$p \wedge q, \quad p \vee q, \quad p \leftrightarrow q$$

são:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

A proposição "$p \wedge q$" é verdadeira(V) somente na linha 1 e, nesta linha, as proposições "$p \vee q$" e "$p \leftrightarrow q$" também são verdadeiras(V). Logo, a primeira proposição **implica** cada uma das outras duas proposições, isto é:

$$p \wedge q \Rightarrow p \vee q \quad \text{e} \quad p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$$

LÓGICA MATEMÁTICA
a) Implicação Lógica

Regras de inferência <u>são regras de transformação sintáticas que podem ser usadas para inferir uma conclusão a partir de uma premissa, para criar um argumento.</u> Um conjunto de regras pode ser usada para inferir qualquer conclusão válida, se esta conclusão for completa. Entretanto nunca se pode inferir uma conclusão inválida, se isto for assegurado. Um completo e seguro conjunto de regras não precisa incluir cada regra da listagem à seguir, já que muitas delas são redundantes, e podem ser provadas com o uso de outras regras.

Implicação Lógica

As mesmas tabelas-verdade também demonstram as importantes **Regras de Inferência**:

p	q	p ^ q	p v q	p ↔ q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

(Adição)

$p \Rightarrow p \vee q$ e $q \Rightarrow p \vee q$

(Simplificação)

$p \wedge q \Rightarrow p$ e $p \wedge q \Rightarrow q$

LÓGICA MATEMÁTICA

a) Implicação Lógica

Modus Ponens: **(significa modo de afirmar)**

p = João sabe ler
q = João compreende o texto

Silogismo

Premissa 1: Se João sabe ler, então João compreende o texto.
Premissa 2: João sabe ler.
Logo: João compreende o texto.

Na lógica Simbólica

$p \rightarrow q$
p
$\therefore q$

∴ Significa portanto e introdução uma conclusão ao silogismo.

LÓGICA MATEMÁTICA
a) Implicação Lógica

(4) A tabela-verdade da proposição "$(p \rightarrow q) \wedge p$" é:

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

Esta proposição é verdadeira(V) somente na linha 1 e, nesta linha, a proposição "q" também é verdadeira(V). Logo, subsiste a **implicação lógica**:

$$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$$

denominada **Regra Modus ponens.**

LÓGICA MATEMÁTICA

a) Implicação Lógica

Modus Tolles: **(significa modo de negar)**

p = João sabe ler
q = João compreende o texto

Silogismo

Premissa 1: Se João sabe ler, então João compreende o texto.
Premissa 2: João não sabe ler.
Logo: João não compreende o texto.

Na lógica Simbólica

$p \rightarrow q$
$\sim p$
$\therefore \sim q$

∴ Significa portanto e introdução uma conclusão ao silogismo.

LÓGICA MATEMÁTICA

a) Implicação Lógica

(5) As tabelas-verdade das proposições "$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$" e "$\sim p$" são:

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$	$\sim p$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

A proposição "$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$" é verdadeira(V) somente na linha 4, e nesta linha, a proposição "$\sim p$" também é verdadeira(V). Logo, subsiste a implicação lógica:

$$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$$

denominada **Regra Modus tollens.**

As mesmas tabelas-verdade também mostram que "$\sim p$" **implica** "$p \rightarrow q$", isto é: $\sim p \Rightarrow p \rightarrow q$.

Exemplo:

$$((p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \vee q) \wedge r) \rightarrow \sim p$$

p	q	r	¬p	¬q	¬r	p→¬q	¬r∨q	(¬r∨q)∧r	(p→¬q)∧(¬r∨q)∧r	((p→¬q)∧(¬r∨q)∧r)→¬p
V	V	V	F	F	F	F	V	V	F	**V**
V	V	F	F	F	V	F	V	F	F	**V**
V	F	V	F	V	F	V	F	F	F	**V**
V	F	F	F	V	V	V	V	F	F	**V**
F	V	V	V	F	F	V	V	V	V	**V**
F	V	F	V	F	V	V	V	F	F	**V**
F	F	V	V	V	F	V	F	F	F	**V**
F	F	F	V	V	V	V	V	F	F	**V**

b) Equivalência Lógica

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$$

Proposições associadas a uma condicional

As tabelas-verdade dessas 4 proposições:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

LÓGICA MATEMÁTICA

c) Lei de Morgan

- O que dizem as **Leis de Morgan**
- Os teoremas do matemático De Morgan são propostas de simplificação de expressões em álgebra booleana de grande contribuição. Definem regras usadas para converter operações lógicas

- E : ^ : Conjunção
- Ou : V : Disjunção
- Se então : □ : Condicional

LÓGICA MATEMÁTICA

c) Lei de Morgan

- 1.1 Lei de Morgam: Negação da Conjunção.
- Para negar uma conjunção, basta negar as duas proposições simples e trocar o E (∧) por um OU (∨). T

De forma simbólica:

Sejam “p” e “q” duas proposições.

~ (p ∧ q) <=> (~p) ∨ (~q)

p	q	p∧q	¬(p∧q)	¬p	¬q	¬p ∨ ¬q
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

LÓGICA MATEMÁTICA
c) Lei de Morgan

- 1.1 Lei de Morgam: Negação da Disjunção.
- Para negar uma disjunção, basta negar as duas proposições simples e trocar o OU (∨) por um E (∧).

De forma simbólica:

Sejam “p” ou “q” duas proposições.

~ (p ∨ q) <=> (~p) ∧ (~q)

p	q	p∨q	¬(p∨q)	¬p	¬q	¬p ∧ ¬q
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

LÓGICA MATEMÁTICA
c) Lei de Morgan

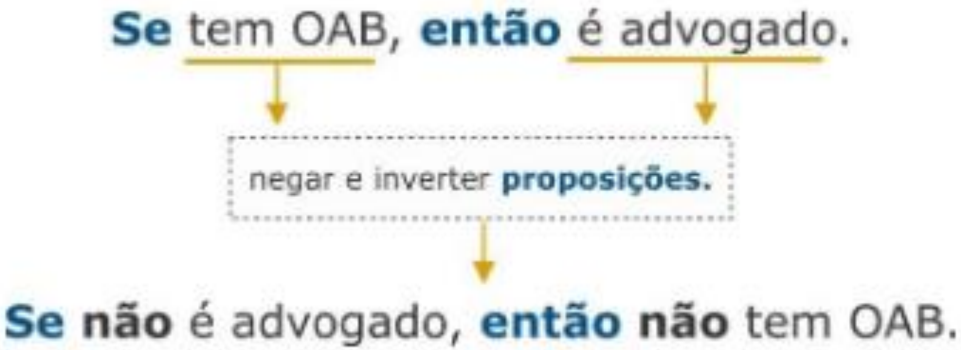
- 1.1 Lei de Morgam: Negação da Condicional.
- Para negar um condicional, mantemos a primeira E (∧) negamos a segunda.

De forma simbólica:

Sejam se “p” então “q” duas proposições.

p □ q <=> ~p V q

P	Q	$P \to Q$	~P	$\sim P \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V



REFERÊNCIAS

- NOÇÕES DE LÓGICA MATEMÁTICA - Abar, C. A . A. P. – www.pucsp.br/~logica (roteiro teórico)e www.pucsp.br/~abarcaap (exercícios)
- ÁLGEBRA BOOLEANA E CIRCUITOS DE CHAVEAMENTO – E. Mendelson - McGraw Hill - 1977
- INICIAÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA - E. de Alencar Filho -E.Nobel -1984
- INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA - B.Castrucci - GEEM -1982
- INTRODUCTION TO METAMATHEMATICS - S.C.Kleene - van Nostrand - 1952

Obrigado (a)!